EPFL Automne 2024
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Correction Série 1

Tous les exercices seront corriges. La correction sera postee sur le moodle vers le Lundi de la semaine suivante.

1 Recurrences

Exercice 1. Le principe de recurrence est la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble de l'ensemble des entiers et $n_0 \geqslant 0$ un entier. On suppose que les deux conditions suivantes sont verifiees*

1. $n_0 \in \mathcal{N}$,
2. *et que si $n \in \mathcal{N}$ alors $n+1 \in \mathcal{N}$ ($n+1$ est ce qu'on a appele le "successeur" de n construit pendant le cours : en termes d'ensembles*

$$n+1 = \bigcup_{\{n,\{n\}\}} = \{0, 1, \cdots, n-1, n\}$$

mais on peut simplement y penser en terme d'entier comme on en a l'habitude).

Alors on a

$$\mathbb{N}_{\geqslant n_0} = \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0\} \subset \mathcal{N}.$$

1. Demontrer cette proposition (dans le langage "classique" avec les objets notion et raisonnement dont vous avez l'habitude ; sans utiliser le langage formel de la logique des predicats du premier ordre...).

Solution 1. Il faut demontrer que $\mathbb{N}_{\geqslant n_0} \subset \mathcal{N}$. Dans le cours on a vu que $\mathbb{N}$ est defini comme l'ensemle qui contient 0 et tous les successeurs (ca veut dire : le succeseur de 0, le successeur de successeur, le successeur de successeur de successeur..). En premier on note que $n_0 \in \mathcal{N}$ par la premiere hypothèse de la Proposition. Par la deuxieme hypothèse $\mathcal{N}$ contient tous les successeurs de n_0. Mais c'est exactement la definition de $\mathbb{N}_{\geqslant n_0}$. Ainsi $\mathbb{N}_0 \subset \mathcal{N}$.

Exercice 2. Utiliser le principe de recurrence ci-dessus pour demontrer les resultats suivants

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$
$$\Sigma_1(n) := 1 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
En deduire que pour tout $n \geqslant 1$
$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$
2. Redemontrer ce dernier resultat a l'aide du principe de recurrence.
3. Pour tout entier $n \geqslant 0$
$$\Sigma_2(n) := 1^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution 2.

1. On definit l'ensemble $\mathcal{N}$ par
$$\mathcal{N} := \{m \in \mathbb{N} \ : \ m \geqslant 1 \text{ et } \Sigma_1(m) = \frac{m(m+1)}{2}\}$$
Si on peut montrer que cet ensemble satisfait Proposition 1 avec $n_0 = 1$, on peut conclure que $\mathbb{N}_{\geqslant 1} \subset \mathcal{N}$. Ainsi tous entiers naturel positive satisfont la condition $\Sigma_1(m) = \frac{m(m+1)}{2}$. Il reste a montrer les deux points de la Proposition 1.

   Pour le premier point : On a $1 \in \mathcal{N}$ parce que $\Sigma_1(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Pour le deuxième point : Si $n \in mcN$ on sait que $\Sigma_1(n)\frac{n(n+1)}{2}$. Alors
$$\begin{aligned}
\Sigma_1(n+1) &= 1 + \ldots + n + 1 \\
&= \Sigma_1(n) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$
Ainsi $n+1 \in \mathcal{N}$. On a alors demontré le premier part de l'exercise 2.1.

Pour le deuxieme part on veut demontrer que

$$1+3+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2.$$

On note que

$$\begin{aligned}
1+3+\ldots+(2n-1) &= 1+2+3+\ldots+2n-2-4-\ldots 2n \\
&= \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{j=1}^{n} 2j \\
&= \sum_{k=1}^{2n} -2\sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)}{2} \text{ par le premier part} \\
&= n^2
\end{aligned}$$

2. On definit l'ensemble $\mathcal{N}$ par

$$\mathcal{N} := \{m \in \mathbb{N} \;:\; m \geqslant 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{m}(2k-1)=m^2\}.$$

Maintenant on vérifie les deux points de la Proposition 1. On a que $1 \in \mathcal{N}$, car $1 = 1^2$. Si $n \in mcN$ on a que

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

En ajoutant $2(n+1)-1$, c'est-à-dire $2n+1$, on obtient

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2,$$

ce qui montre l'égalité pour $n+1$. Ainsi $n+1 \in mcN$. Ainsi l'égalité est vraie pour tout entier $\geqslant 1$ par Proposition 1.

3. On definit l'ensemble $\mathcal{N}$ par

$$\mathcal{N} := \{m \in \mathbb{N} \;:\; m \geqslant 0 \text{ et } \Sigma_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\}.$$

On vérifie les deux points de la Proposition 1. On a que $0 \in \mathcal{N}$, car $0 = 1\frac{0(1)(3)}{6}$. Si $n \in mcN$ on a que

$$\Sigma_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\Sigma_2(n+1) &= 1^2 + \ldots + (n+1)^2 \\ &= \Sigma_2(n) + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \\ &= \ldots = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $n+1 \in \mathcal{N}$. Ainsi l'égalité est vraie pour tout entier $\geqslant 0$ par Proposition 1.

Exercice 3. Soit $x > -1$ un nombre reel. Montrer en utilisant le principe de recurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx. \quad \textit{(Inegalite de Bernoulli)}$$

Solution 3. On peut encore definir l'ensemble $\mathcal{N}$ par

$$\mathcal{N} := \{m \in \mathbb{N} \ : \ m \geqslant 1 \text{ et } (1+x)^n \geqslant 1 + nx\}.$$

Maintenant on motrer Proposition 1. Evidemment pour $n = 1$ l'inégalité de Bernoulli est vraie. Supposons alors que $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Alors, pour $n+1$, on a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geqslant (1+nx)(1+x) \qquad \text{(on utilise l'hypothèse et que } (1+x) > 0) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geqslant 1 + (n+1)x \qquad (\text{car } nx > 0).\end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité est vraie pour tout entier $\geqslant 1$.

2 Ensembles

Exercice 4. On rappelle que si E est un ensemble, la reunion de E, $\bigcup_E$ est l'ensemble dont les elements sont exactement les elements des elements de E (on rappelle que ces elements sont eux-meme des ensembles qui peuvent donc posseder des elements).

1. Soit $A \neq \emptyset$ un ensemble non vide, montrer que
$$\bigcup_{\{A\}} = A.$$
2. Que valent
$$\bigcup_{\emptyset}, \bigcup_{\{\emptyset\}}, \bigcup_{\{\emptyset, A\}} ?$$
3. Que vaut $A \cup \emptyset$?

Solution 4.

1. On va montrer l'egalité par double inclusion. On commence avec $x \in \bigcup_{\{A\}}$. Par definition ca veut dire que x est un element d'un element de $\{A\}$. Plus concretement : Les elements de $\{A\}$ sont A, alors x est un element de A. Ainsi $x \in A$ et avec ca x est contenue dans la côté droite et on a fini la premiere inclusion. Pour l'autre inclusion on prends un $y \in A$. Si $y \in A$, on sait que y est un element d'un element de $\{A\}$. Ainsi par la definition de la reunion $y \in \bigcup_{\{A\}}$ et on peut conclure l'autre inclusion.
2. $\emptyset, \emptyset$ et A
3. A

Exercice 5. Soit X un ensemble. Pour A, B des sous-ensembles de X on defini la difference de A et B
$$A - B := \{x \in A,\ x \notin B\} \subset X$$
(les elements de A qui ne sont pas des elements de B). En particulier
$$X - A = \{x \in X,\ x \notin A\} \subset X$$
(l'ensemble des elements de X qui ne sont pas dans A) est appelle le *complementaire* de A dans X et est note A^c.

On defini alors la difference *symetrique* de A et B en posant
$$A\Delta B := A \cup B - A \cap B = \{x \in A \cup B,\ x \notin A \cap B\} \subset X$$
(les elements de X qui sont dans la reunion de A et B et qui ne sont pas dans leur intersection).

1. Montrer que $A\Delta B = B\Delta A = (A - B) \cup (B - A)$.
2. Calculer $\emptyset\Delta A$, $A\Delta A$, $A\Delta X$, $A\Delta A^c$.

Solution 5.

1.

$$\begin{aligned} A\Delta B &= \{x \in A \cup B,\ x \notin A \cap B\} \\ &= \{(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin A \cap B)\} \\ &= \{(x \in A \text{ et } x \notin A \cap B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \cap B)\} \\ &= \{(x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\} \\ &= \{(x \in A \text{ et } x \notin B)\} \cup \{(x \in B \text{ et } x \notin A)\} \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

   Peut être egalement démontré par double inclusion.

2. $\emptyset \Delta A = A$, $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta X = A^c$, $A \Delta A^c = X$

Exercice 6. On considere l'application polynomiale (dite de Cantor)

$$C : (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto ((m + n)^2 + m + 3n)/2 \in \mathbb{N}.$$

1. Verifier que C est bien une application de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$.
2. Calculer les valeurs $C(m, n)$ pour $m+n \leqslant 3$ et les reporter sur les point $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ d'une representation du quart de plan $\{(x, y),\ x, y \geqslant 0\}$.
3. Pour $k \geqslant 0$ un entier, on definit le sous-ensemble

$$D_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2,\ m + n = k\}.$$

   Quelles sont les valeurs prises par $C(m, n)$ quand (m, n) decrit D_k ?
4. En deduire que pour tout entier $l \in \mathbb{N}$ il existe (m, n) tel que

$$C(m, n) = l$$

   et que un tel couple (m, n) est unique. On dit que l'application polynomiale $C : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Remarque. Une autre application possible (obtenue par symetrie) est

$$C'(m, n) = ((m + n)^2 + 3m + n)/2.$$

On ne sait pas si il y existe d'autre applications polynomiales etablissant une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$.

Solution 6.

1. Rappelons nous d'abord de quelques faits utiles. Pour $n, m \in \mathbb{N}$:

- Si n et m sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs alors $n+m$ est pair :
  Dans le premier cas on écrit $n = 2p$ et $m = 2q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, puis on voit facilement que $n + m = 2(\underbrace{p+q}_{\in\mathbb{N}})$ est pair.
  Dans le deuxième cas on écrit $n = 2p + 1, m = 2q + 1$ et alors $n + m = 2(\underbrace{p+q+1}_{\in\mathbb{N}})$, ce qui montre à nouveau la parité.
- Si n est pair et m est impair alors $n+m$ est impair (par un raisonnement similaire au précédent).
- Le carré d'un entier pair est pair :
  De même qu'avant, on écrit $n = 2p$ et alors $n^2 = 4p^2 = 2 \cdot \underbrace{2p^2}_{\in\mathbb{N}}$ donc n^2 est pair.
- Le carré d'un entier impair est impair :
  De même qu'avant, on écrit $n = 2p + 1$ et alors $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2 \cdot \underbrace{2p^2 + 2p}_{\in\mathbb{N}} + 1$ donc n^2 est impair.

Maintenant on veut montrer que $(m+n)^2 + m + 3n$ est toujours pair en faisant une grande disjonction des cas sur la parité de n et m :

- $\underline{n \text{ et } m \text{ pairs}}$: alors $m+n$ et $m+3n$ sont pairs, donc $(m+n)^2+m+3n$ est aussi pair et donc $C(m,n) \in \mathbb{N}$✓
- $\underline{n \text{ et } m \text{ impairs}}$: pareil qu'au dessus✓
- $\underline{n \text{ pair et } m \text{ impair}}$: alors $n+m$ est impair, $(n+m)^2$ aussi, et $m+3n$ aussi, donc $(m+n)^2 + m + 3n$ est pair et $C(m,n) \in \mathbb{N}$✓
- $\underline{n \text{ impair et } m \text{ pair}}$: pareil qu'au dessus✓

2. Les paires possibles sont

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid n+l \leqslant 3\} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(3,0)\}$$

Les valeurs de $C(m,n)$ sont données par le tableau ci-dessous :

$n\backslash m$	0	1	2	3
0	0	1	3	6
1	2	4	7	
2	5	8		
3	9			

3. Remarquons tout d'abord qu'on peut ré-écrire $D_k = \{(m, k-m) \mid 0 \leqslant m \leqslant k\}$.
Alors $\forall (m, k-m) \in D_k : C(m, k-m) = \frac{(m+k-m)^2+3m+k-m}{2} = \underbrace{\frac{k^2+k}{2}}_{=:c_k} + m$ et donc

$$C(D_k) = \{c_k + m \mid 0 \leqslant m \leqslant k\} = [\![c_k, c_k + k]\!]$$

(les doubles crochets symbolisent des intervalles d'entiers).

Nous avons défini la grandeur c_k pour pouvoir exprimer plus simplement la relation suivante : $\forall k \in \mathbb{N}, c_{k+1} = c_k + k + 1$. En effet $\frac{k^2+k}{2} + k + 1 = \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}$.

Ainsi, tous les intervalles $C(D_k)$ sont contigus, et ne se chevauchent pas (si l'intervalle $C(D_k)$ se termine à la borne a, alors l'intervalle $C(D_k)$ commence à la borne $a+1$). Comme ils commencent à 0 et leur taille ne fait qu'augmenter, ils couvrent tout $\mathbb{N}$ et ils en créent une partition :

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} C(D_k)$$

On pourrait aussi le voir à partir du fait que la suite $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ donc

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} [\![c_k, c_{k+1} [\![= \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} C(D_k)$$

4. Tout d'abord, $\forall k \in \mathbb{N}$, la restriction $C_{|D_k} : D_k \to C(D_k)$ est bijective puisqu'elle est définie de maniére "affine" : $C(m, k-m) = c_k + m$. Ensuite, pour montrer que C elle-même est bijective on n'a qu'à montrer que chaque élément $y \in \mathbb{N}$ a un unique antécédent par C. C'est le cas puisque les ensembles $C(D_k), k \in \mathbb{N}$ forment une partition de $\mathbb{N}$, donc $\exists! k_y \in \mathbb{N} : y \in \mathbb{C}(D_{k_y})$. Mais alors comme C est bijective lorsque restreinte à D_{k_y}, y a un unique antécédent dans D_{k_y} et donc dans $\mathbb{N}^2$. S'il y en avait un autre dans $D_{k'}$ alors on aurait $\{y\} \subseteq C(D_{k_y}) \cap C(D_{k'})$ et donc l'intersection n'est pas vide comme on l'a montré dans la question précédente.
Ainsi $C : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est bien bijective. $\square$